Problema sobre ecuaciones simultáneas 2.

Dado el modelo:

$$A_t = n_1 B_t + n_2 + u_t$$
$$B_t = n_3 A_t + n_4 + n_5 C_t + v_t$$

Que pretende explicar las variables A_t y B_t en función de sí mismas y una variable C_t junto con constantes y perturbaciones. Se conocen:

$$(AB)'(AB) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (1C)'(1C) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1C)'(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Conocida esta información muestral estimar cada ecuación aplicando distintos métodos. Justificando el porqué de cada uno de ellos.
b) Realizar una predicción para la variable A_t conocido el dato B_t=5.
c) Realizar una predicción para la variable B_t conocidos los datos A_t=5 y C_t=7.

Solución

a) Para identificar el modelo crearemos la matriz **A** formada por los parámetros estructurales del modelo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & n_3 \\ n_1 & -1 \\ n_2 & n_4 \\ 0 & n_5 \end{bmatrix}$$

Puesto que solamente hay restricciones de nulidad podemos aplicar el método de la forma estructural.

En el modelo hay 2 variables endógenas –A y B- (g) y 2 variables predeterminadas (k) -1(cte) y C-. El número de variables excluidas en la primera ecuación es una (e_1) y el de la segunda ecuación es cero (e_2)

Primera ecuación.

Método del rango: $\rho(A_1) = \rho\left[n_5\right] = 1 = g - 1$ ecuación identificada

Método del orden: $e_1 = 1 = g - 1$ ecuación exactamente identificada

Por tanto, la primera ecuación por estar identificada por el método del rango y exactamente identificada por el método del orden, diremos que dicha ecuación está exactamente identificada.

Segunda ecuación.

Método del rango: $\rho(A_2) = 0 \neq g - 1$ ecuación no identificada

Por tanto, la segunda ecuación por no estar identificada por el método del rango diremos que dicha ecuación está no identificada.

Tenemos tres posibles métodos para la estimación de los parámetros de estas ecuaciones: MCO, MCI y MC2E.

Para la segunda ecuación por estar no identificada no se puede emplear MCI ni MC2E,, por tanto escogemos MCO como el método para la estimación de los parámetros de la ecuación.

En la primera ecuación, por estar exactamente identificada, se puede emplear cualquiera de los tres métodos, pero dado que MCO tiene que emplearse en la segunda ecuación forzosamente sólo nos quedan MCI y MC2E, sabiendo que el resultado que se obtendrá será el mismo por ambos métodos, parece razonable escoger MCI ya que resulta de cómputo más rápido.

Comenzaremos estimando por MCO los parámetros del modelo reducido.

$$\hat{\Pi} = ((1C)'(1C))^{-1}((1C)'(AB)) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la estimación de la forma reducida será:

$$\hat{A}_t = 3C_t + 0.8$$
$$\hat{B}_t = C_t + 1$$

Ahora vamos a estimar el modelo por los métodos elegidos.

1. En primer lugar vamos a estimar la primera ecuación del modelo por MCI.

Para ello basta con resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ n_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} n_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta forma se obtiene la estimación para la primera ecuación:

$$\hat{A}_t = 3B_t - 2.2$$

2. Ahora estimaremos por MCO la segunda ecuación del modelo.

Para ello basta con resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.71 \\ -0.09 \end{bmatrix}$$

De esta forma se obtiene la estimación para la segunda ecuación:

$$\hat{B}_t \cong 0.37A_t + 0.71 - 0.09C_t$$

b) Para la predicción en el caso de la variable A_t conocido el dato $B_t=5$ utilizamos la expresión anteriormente calculada:

$$\hat{A}_t = 3B_t - 2.2$$

Por tanto:

$$\hat{A}_t = 3*5_t - 2.2 = 15 - 2.2 = 12.8$$

Para la predicción en el caso de la variable B_t conocidos los datos $A_t=5$ y $C_t=7$ podríamos utilizar la estimación por MCI –estimación consistente- anterior:

$$\hat{B}_t \cong 0.37A_t + 0.71 - 0.09C_t$$

$$\hat{B}_t \cong 0.37*5 + 0.71 - 0.09*7 = 1.85 + 0.71 - 0.63 = 1.93$$